Ενδεικτικές Απαντήσεις Πανελληνίων Θεμάτων 2009
Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

Α) Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ.....

Β) Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_1 i =1,2, ….,κ ορίζεται σαν το πηλίκο της απόλυτης συχνότητας (ν_i) της τιμής (x_i), προς το μέγεθος του δείγματος ν

$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ i = 1,2,….κ

Γ) α) ΛΑΘΟΣ
β) ΣΩΣΤΟ
γ) ΛΑΘΟΣ
δ) ΣΩΣΤΟ
ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

i	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$
1	2	6	12
2	3	ν_2	$3\nu_2$
3	5	3	15
4	8	4	32
Σύνολο		$\nu = \sum_{i=1}^{4} \nu_i = 13+\nu_2$	$\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i = 59+3\nu_2$

α) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow 4 = \frac{59+3\nu_2}{13+\nu_2} \Leftrightarrow 4\cdot(13+\nu_2) = 59+3\nu_2$

$52+4\nu_2 = 59+3\nu_2 \Leftrightarrow 4\nu_2 - 3\nu_2 = 59-52$

$\nu_2 = 7$

οπότε $\nu = 13+\nu_2 \Leftrightarrow \nu = 13+7 \Leftrightarrow \nu = 20$

Άρα πίνακας γίνεται:

i	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2\cdot\nu_i$
1	2	6	12	-2	4	24
2	3	7	21	-1	1	7
3	5	3	15	1	1	3
4	8	4	32	4	16	64
		ν=20	$\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i = 80$			$\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot\nu_i = 98$

β) $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{4}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \nu_i\right] = \dfrac{1}{20}\cdot 98 = 4{,}9$

γ) Είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4{,}9} \approx 2{,}2$

Επομένως

$$CV = \frac{s}{|\overline{x}|} = \frac{2.2}{4} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει $CV \le 10\% \Leftrightarrow$

$$CV \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\frac{11}{20} \le \frac{1}{10} \quad \text{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

Οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ 3^{Ο}

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$ $\boxed{1}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha$
$f''(\chi) = 6x - 12$

Οπότε η σχέση $2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2$ $x \in \mathbb{R}$
γίνεται $2(6x-12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow$
$12x - 24 + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow$
$\alpha = 9$

Αφού α=9 η συνάρτηση και οι παράγωγοι της γίνονται :

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 7$
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
$f''(\chi) = 6x - 12$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-12x+9}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x^2-4x+3)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-3)}{(x+1)} =$
$\dfrac{3(1-3)}{1+1} = \dfrac{-6}{2} = -3$

γ) Έστω η εξίσωση της εφαπτομένης ε:y=λx+β
έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και είναι παράλληλη στην y = -3x άρα **λ = -3.**
Γνωρίζουμε από θεωρία ότι αν Α (x_0, y_0) το σημείο επαφής την ε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης τότε $F'(x_0) = \lambda = -3 \Leftrightarrow$

$$F'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^{\,2} - 12x_0 + 2 = -3 \Leftrightarrow 3x_0^{\,2} - 12x_0 + 9 + 3 = 0$$

$3x_0^{\,2} - 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3(x_0^{\,2} - 4x_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow 3(x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$ **x_0 = 2.**

Άρα $F(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 \;\; - 7 = 8 - 24 + 18 - 7 = 26 - 24 - 7 = 2 - 7 = -5$

Άρα το σημείο επαφής είναι Α(2,-5) και επαληθεύει την $\boxed{1}$

οπότε: $-5 = -3\cdot 2 + \beta$

$-5 = -6 + \beta$

$\beta = 6 - 5 = 1$

β = 1. **y=-3x+1**

<u>ΘΕΜΑ 4^Ο</u>

$f(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$ **, x>0,** $\lambda \in \mathbb{R}$

Α.α) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x < 2$

x	0	2	$+\infty$
f΄(x)		+	-
f(x)		$\nearrow$	$\searrow$

Άρα f $\nearrow$ **στο** $(0,2]$

και f$\searrow$ **στο** $[2,+\infty)$

β) Η f(x) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0=2 με μέγιστη τιμή
f(2)= ln2-1+λ^2-6λ+2= ln2+λ^2-6λ+1

Β)α)

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [2, +∞)
επομένως 2<3<4<5<8 $\Leftrightarrow$
f(2)>f(3)>f(4)>f(5)>f(8)

i	x_i
1	**f(8)**
2	**f(5)**
3	**f(4)**
4	**f(3)**
5	**f(2)**

Άρα $R = x_{max} - x_{min} = f(2) - f(8)$
όπου f(2)=ln2-1+λ^2-6λ+2

$f(8)=\ln 8-4+\lambda^2-6\lambda+2$

Άρα έχουμε $R=[\ln 2-1+\lambda^2-6\lambda+2]-[\ln 8-4+\lambda^2-6\lambda+2]$

$= \ln 2-1+\lambda^2-6\lambda+2-\ln 8+4-\lambda^2+6\lambda-2$

$=\ln 2-\ln 8+3= 3+\ln\frac{2}{8} = 3+\ln\frac{1}{4}$

και η διάμεσος είναι

$$\underset{\Downarrow}{\delta} \underset{\text{μεσαία παρατήρηση}}{\overset{\nu \text{ είναι περιττός}}{=}} t_{\frac{\nu+1}{2}} = t_{\frac{5+1}{2}} = t_3 = f(4) = \ln 4-2+\lambda^2-6\lambda+2=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$$

(β) $\Omega=\{1,2,3,..........,100\}$

$\lambda\in\Omega$

$A=\{\lambda\in\Omega \,/\, R+\delta<-2\}$

Άρα $R+\delta<-2 \Leftrightarrow$

$3 + \ln\frac{1}{4}+\ln 4+ \lambda^2-6\lambda<-2 \Leftrightarrow$

$3+ \ln(\frac{1}{4}\cdot 4)+ \lambda^2-6\lambda+2<0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2-6\lambda+5<0 \Leftrightarrow$

$(\lambda-1)(\lambda-5)<0 \Leftrightarrow$

$1<\lambda<5$

όπως μπορούμε να δούμε και από το πινακάκι έχουμε

λ	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$\lambda^2-6\lambda+5$	+	-	+	

$\lambda\in(1,5)$

$\lambda\in\ \Omega = \{1,........8\}$

Άρα $A=\{2,3,4\}$

και $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{100}$ πρόκειται για τον κλασσικό ορισμό αφού τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα