Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα 1ο

α.

x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα	$x_i\nu_i$
0	20	0,40	40	20	0
1	15	0,30	30	35	15
2	5	0,10	10	40	10
3	10	0,20	20	50	30
ΣΥΝΟΛΟ	**20**	**1**	**100**	**-**	**55**

β. $\bar{x} = \dfrac{55}{50} = 1{,}1$

γ. $\delta = \dfrac{t_{25} + t_{26}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

δ. $R = 3 - 0 = 3$

$10\bar{x} + \delta - 4R = 10 \cdot 1{,}1 + 1 - 4 \cdot 3 = 11 + 1 - 12 = 0$

Θέμα 2ο

α. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1$

β. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2\lambda x - 3) = 2\lambda \cdot 1 - 3 = 2\lambda - 3$

γ. Για να υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ θα πρέπει:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

$2\lambda - 3 = 1 \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{4}{2} = 2$

δ. Για λ=2 η f γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - 1}, & \text{αν } x>1 \\ 4x - 3, & \text{αν } x \le 1 \end{cases}$$

$f(2) = \dfrac{2^2 - 2}{2 - 1} = \dfrac{4 - 2}{1} = 2$

$f(-1) = 4 \cdot (-1) - 3 = -4 - 3 = -7$

Οπότε $K = 2f(2) - 3f(-1) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-7) = 4 + 21 = 25$

Θέμα 3ο

α. $f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

β. $f''(x) = (3x^2 - 3)' \Leftrightarrow f''(x) = 6x$

γ. Έχουμε λοιπόν:

$(\alpha - 1)f'(0) + 4f''(1) = 27 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(-3) + 4 \cdot 6 = 27$

$-3\alpha + 3 + 24 = 27 \Leftrightarrow -3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

Θέμα 4ο

α. Πρέπει x>0 , οπότε το πεδίο ορισμού A_f της f είναι το $A_f = (0, \infty)$.

β. $f'(x) = (\ln x - x - 1)' = \dfrac{1}{x} - 1$

γ. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow x < 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Στο $(0,1]$ ισχύει $f'(x) > 0$ και η f παραγωγίσιμη οπότε είναι και γνησίως αύξουσα

Στο $[1, +\infty)$ ισχύει $f'(x) < 0$ και η f παραγωγίσιμη οπότε είναι και γνησίως φθίνουσα

δ. Ισχύει: $2008 < 2009$

Οπότε $f(2008) > f(2009)$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty]$

$\ln 2008 - 2008 - 1 > \ln 2009 - 2009 - 1$

$\ln 2008 - 2009 > \ln 2009 - 2010$