Ενδεικτικές Απαντήσεις Πανελληνίων Θεμάτων 2009
Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α) Θεώρημα από σελίδα 251 σχολικού βιβλίου
Β) Ορισμός από σελίδα 213 σχολικού βιβλίου
Γ) α)Σωστό
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ 2^{o}

Α) α) $z=(2\lambda+i)+(2\lambda-1)i$

Αν Μ(z) η εικόνα του z, τότε Μ(z)=(Re(z), Im(z))= (2λ+1, 2λ-1)

με $\left.\begin{matrix} x=2\lambda+1 \\ y=2\lambda-1 \end{matrix}\right\}\cdot(-1)$ $\quad \left(\begin{matrix} x=2\lambda+1 \\ -y=-2\lambda+1 \end{matrix}\right)+$

$$x-y=2 \Leftrightarrow$$
$$x-y-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon: y=x-2 \text{ με } (\lambda_\varepsilon=1)}$$

β) $|z|_{min}=d(0,\varepsilon)=\dfrac{|x_o-y_o-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|0-0-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=|z_H|$

όπου Η είναι το σημείο τομής της (ΟΗ) με την (ε)

• ΟΗ: $y-y_o=\lambda_{OH}(x-x_o)$

με ΟΗ $\perp$ ε Άρα $\left.\begin{matrix} \lambda_{OH}\lambda_\varepsilon=-1 \\ \text{με } \lambda_\varepsilon=1 \end{matrix}\right\}$ Άρα $\lambda_{OH}=-1$

Άρα ΟΗ: $y-y_o=\lambda_{OH}(x-x_o)$
ΟΗ: $y-y_o=-1(x-0)$
ΟΗ: $y=-x$

$\left.\begin{matrix} \text{ΟΗ: } x+y=0 \\ \varepsilon: \quad x-y=2 \end{matrix}\right\} 2x=2 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

ε: $x-y=2$ (x=1)
$1-y=2$
$y=-1$
Άρα $\boxed{z_H=z_o=1-1i}$

Β) Έστω ω=x+ yi τότε $\overline{w}$=x-y_i

$$|w|^2 = w \cdot \overline{w} = (Rew)^2+(Imw)^2=x^2+y^2$$

Άρα η $|w|^2 + \overline{w}$-12= z_o (γίνεται)

$x^2+y^2+x-y_i-12=1-1i$
$x^2+y^2+x-y_i-12-1+1i=0$
$(x^2+y^2+x-13) + (1-y)i=0$

Άρα 1. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+x-13=0 \\ \text{και} \\ 1-y=0 \Leftrightarrow y=1 \end{array}\right\} x^2+1^2+x-13=0 \Leftrightarrow \boxed{x^2+x-12=0}$

$\Delta=1^2-4\cdot 1(-12)=1+48=49$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{2} \Leftrightarrow x_1=\frac{-1+7}{2}=3$$

$$x_2=\frac{-1-7}{2}=-4$$

για x=3 , y=1 w_1=3+1i
για x=-4, y=1 w_2=-4+1i

Θέμα 3ο

$f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $x>-1$
$\alpha>0, \ \alpha\neq 1$

Α) f(x): συνεχής και παραγωγίσιμη ως διαφορά των συνεχών και παραγωγίσιμων

y= α^x (εκθετική)
y= ln(x+1) που είναι σύνθεση των συνεχών και παραγωγίσιμων y=lnx και y=x+1

με $f'(x)=(\alpha^x-\ln(x+1))'=(\alpha^x)'-(\ln(x+1))$

$$=\alpha^x\cdot\ln\alpha-\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)'$$

$$=\alpha^x\cdot\ln\alpha-\frac{1}{x+1}\cdot 1 \quad \text{Άρα}$$

$$f'(x)=\boxed{\alpha^x\cdot\ln\alpha-\frac{1}{x+1}}$$

Άρα $f(x) \geq 1$ για κάθε x>-1 και 1= f(0) έχω $f(x) \geq f(0)$ για κάθε x>-1
το xo=0 είναι θέση ολικού ελαχίστου οπότε από Fermat (f: παραγωγίσιμη)

$f'(0)=0$

όμως $f'(x)= \alpha^x \cdot \ln\alpha - \dfrac{1}{x+1}$ Άρα

$$\alpha^0 \ln\alpha - \frac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 \cdot \ln\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\ln\alpha = 1$

$e^{\ln\alpha} = e^1$

$\boxed{\alpha = e}$

Β)

Για α = e

$$f(x) = e^x - \ln(x+1)$$

$$f'(x) = e^x \ln e - \frac{1}{x+1}$$

$$\boxed{f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \quad (1)}$$

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad \text{για κάθε } x > -1$$

Άρα $f''(x) > 0$

Άρα f κυρτή στο $(-1,+\infty)$.

(β) Από (1) παρατηρώ $f(0) = e^0 - \dfrac{1}{0+1} = 1 - 1 = 0$

Άρα:

x	-∞	-1	0	+∞
f'''(x)		+	+	
f(x)		x<0 ↗ f''(x) < f''(0) f''(x) < 0 (-)	↗ x>0 f''(x) > f''(0) f''(x) > 0 (+)	
f		↘	↗	
		τ.	ε.	

f''(0) = 1

Άρα $\begin{matrix} f \searrow \text{στο} (-1,0] \\ f \nearrow \text{στο} [0,+\infty) \end{matrix}$

γ)

Αν β,γ $\in (-1,0) \bigcup [0,+\infty)$ να δειχτεί ότι:

Η $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται

$(x-2)\cdot(f_{(\beta)}-1)+(x-1)\cdot(f_{(\gamma)}-1)=0$ =====⇒ Η(x)

Η(x): συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα των συνεχών y= (f(β)-1)(x-2)

y=(f(γ)-1)(x-1)

με Η(1)=(1-2)(f(β)-1)+(1-1)(f(γ)-1)=-(f(β)-1)=1- f(β)<0

Άρα f(0)=1 ολικό ελάχιστο και $\beta \neq 0$

και Η(2)=(2-2) (f(β)-1)+ (2-1)(f(γ)-1)=)(f(γ)-1) >0

Άρα f(0)=1 ολικό ελάχιστο και $\gamma \neq 0$

Άρα Η(1)Η(2)<0

οπότε από ρίζα Bolzano υπάρχει μία ρίζα της Η στο (1,2) και επομένως το ζητούμενο

ΘΕΜΑ 4^{o}

$f/[0,2]$ συνεχής με

$$\int_0^2 (t-2)\cdot f(t)dt = 0$$

Η(x)= $\int_0^x tf(t)dt$ παραγωγίσιμη (Άρα και συνεχής) ως συνάρτηση ολοκλήρωμα της συνεχούς y=tf(t) η οποία με την σειρά της είναι γινόμενο συνεχών συναρτήσεων y=t, y=f(t)

με Η΄(x)=[$\int_0^x tf(t)dt$]΄ = xf(x) 1

$$G(x) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, \ x \in (0,2] \right. \\ 6\ln_{t\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} \quad x = 0 \end{cases}$$

- $\ln_{t\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} \overset{\%}{=} \ln_{t\to 0} \dfrac{1-(\sqrt{1-t^2})}{t^2(1+\sqrt{1-t^2})} = \ln_{t\to 0} \dfrac{1-(1-t^2)}{t^2(+\sqrt{1-t^2})}$

$$= \ln_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}(1+\sqrt{1-t^2})} = \ln_{t\to 0} \frac{1}{(1+\sqrt{1-t^2})} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt - \int_0^x f(t)dt + 3 \\ 3 \end{cases}$$

α) για $x \in (0,2]$

$$G(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3$$

είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως διαφορά των $y = \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x}$ που είναι πηλίκο των συνεχών και παραγωγίσιμων

$y = f(tx) = \int_0^x tf(t)dt$ και $y=x$

και της $y = \int_0^x f(t)dt$ (συνάρτηση ολοκλήρωμα της συνεχούς $y = f(t)$)

Συνέχεια στο $x_0 = 0$

$G(0)=3$ ενώ

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3\right]$$

όπου

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt \overset{\substack{\text{παραγωγίσιμη} \\ \text{άρα και} \\ \text{συνεχής}}}{=} \int_0^0 f(t)dt = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{H(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} \underset{d-H}{\overset{\%}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{1} = \lim_{x\to 0}\left[xf(x)\right]$$

$$\overset{f:\text{συνεχής}}{=} 0\cdot f(0) = 0$$

Άρα L= $\lim_{x\to 0}$ G(x)= 0-0+3=3

Άρα G(0)= $\lim_{x\to 0}$ G(x)   Άρα G: συνεχής και στο x_o=0
οπότε G(x)   συνεχής στο [0,2]

β) $G(x) = \dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3,$ (0,2) παραγωγίσιμη βλέπε (α)

$$G'(x) = \left[\frac{H(x)}{x}\right]' - \left[\int_0^x f(t)dt\right]' + 3'$$

$$= \frac{H'(x)x - H(x)x'}{x^2} - f(x) + 0$$

$$= \frac{H'(x)x - H(x)}{x^2} - f(x)$$

$$\overset{1}{=} \frac{xf(x)x - H(x)}{x^2} - f(x)$$

$$= \frac{x^2 f(x)}{x^2} - \frac{H(x)}{x^2} - f(x)$$

$$= f(x) - \frac{H(x)}{x^2} - f(x)$$

Άρα $G'(x) = \dfrac{-H(x)}{X^2}$ 0<X<2

γ) Θεωρώ την H(x) = 0 $\Leftrightarrow$ – H(x) = 0 (0<x<2)

$\dfrac{-H(x)}{x^2} = 0$ από β)

$\boxed{G'(x) = 0}$

G / [0, 2] συνεχής
[0, 2) παραγωγίσιμη
G(0) = 3

$$G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3$$

$$= \frac{\int_0^2 tf(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt}{2} + 3 = \frac{\int_0^2 tf(t)dt - \int_0^2 2f(t)dt}{2} + 3$$

$$\frac{\int_0^2 (t-2)f(t)dt}{2} + 3 \overset{\delta\varepsilon\delta}{=\!=} \frac{0}{2} + 3 = 3$$

Άρα G(0) = G(2) και τότε από Rolle υπάρχει $\alpha \in (0,2) : G'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0$